

频率失配条件的自适应 相位差无偏估计方法及性能分析

李 明, 沈廷鳌, 毛育文

(后勤工程学院后勤信息与军事物流工程系, 重庆 401311)

摘 要: 针对频率失配条件下受噪声影响导致相位差估计精度不高的问题, 提出一种频率失配的自适应相位差无偏估计方法, 提升相位差估计的精确性和抗噪性. 为此, 首先通过对两路正弦信号的展开式参数进行自适应估计, 利用展开式参数估计值实时计算两路正弦信号的相位差; 其次, 利用泰勒级数展开式对相位差估计方法进行了估计偏差分析, 证明了频率失配条件下所提相位差估计方法的无偏性, 并给出了相位差估计方法的稳态性能; 最后, 给出了不同方法的相位差估计结果, 并讨论了各参数对相位差估计的影响, 计算结果表明所提方法的有效性与正确性.

关键词: 相位差估计; 频率失配; 无偏性; 性能分析

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2019)09-1905-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2019.09.013

Unbiased Adaptive Phase Difference Estimation Method in the Presence of Frequency Mismatch and Its Performance Analysis

LI Ming, SHEN Ting-ao, MAO Yu-wen

(Department of Information and Military Logistics Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing, China)

Abstract: For the issue of low accuracy of phase difference estimation affected by the noise under the condition of frequency mismatch, an unbiased adaptive phase difference estimation method in the presence of frequency mismatch is proposed, which could improve the accuracy of phase difference estimation and enhance the ability of anti-noise. Therefore, firstly the expansion parameters of two sinusoidal signals are adaptive estimated, which is used to estimate the phase difference between two sinusoidal signals. Secondly, the deviation analysis of phase difference estimation is carried out by the expansion of Taylor series, the unbiased phase difference estimation with frequency mismatch is proved, and the performance of steady-state for phase difference estimation are also presented. Consequently, the phase difference estimation results of different methods are compared, the effect by different parameters are discussed, and the calculated results are provided to confirm the effectiveness and correctness of the proposed method.

Key words: phase difference estimation; frequency mismatch; unbiased; performance analysis

1 引言

相位差估计在导航定位、电力系统、语音处理和工业测量等领域有着较为广泛的应用^[1-4]. 如定位系统中两路接收信号的到达时间差计算 (TDOA, Time Difference Of Arrival), 电力系统中功率因素的测量, 语音处理中的语音增强和回声消除, 科里奥利质量流量计的流量计量, 都需要对两路同频信号的相位差进行估计. 相位差估计方法大致可以分为三种, 一是基于 DFT

(Discrete Fourier Transform, 离散傅里叶变换) 和 DTFT (Discrete-time Fourier Transform, 离散时间傅里叶变换) 的频谱分析方法^[5,6], 这类方法在获得信号频率的基础上, 计及负频率影响, 利用 DFT 推导相位差计算公式. 为了克服窗函数带来的频谱泄漏问题, 文献[7,8]利用性能较好的窗函数对此类方法进行改进, 可以在一定程度上减少频谱泄漏带来的误差. 虽然这种方法计算精度较高, 抗噪能力较好, 但计算复杂, 受频率失配影响较大, 特别针对时变信号时, 其精度受递推计算点数影

响,性能会出现一定程度下降.二是基于相关原理的相位差估计方法^[9,10],这类方法主要利用交叉相关和自相关原理计算相位差,计算效率高且不需要获得信号频率的值,但其抗噪能力弱,且受信号非整周期采样影响较大.为了克服非整周期采样所带来的影响,文献[11]利用数据延拓的方式,尽可能获得信号的整周期采样数据点数,降低非整周期采样所带来的误差,但是其对噪声的抑制能力依旧很弱,且估计结果有偏.文献[12]提出一种相频匹配的相位差估计方法,能够减少非整周期采样的影响,但这种方法频率必须匹配,否则误差较大,且抗噪性能有待进一步提升.为了增强基于相关原理的相位差估计抗干扰能力,文献[13]提出一种双正交解调的方法,该方法不依赖于采样信号的幅值,在一定程度上抑制了倍频项对相位差估计的影响,但其对信号频率的估计值精度较为敏感.三是基于 Hilbert 变换的相位差估计方法^[14,15].此类方法利用 Hilbert 变换对信号进行 90° 的相移,然后利用相关方法进行相位差计算.由于要进行 Hilbert 变换,导致计算略显复杂,且同样受噪声的影响较大^[16].

综上,为解决现有相位差估计方法计算复杂、受频率失配影响较大和抗噪性弱的问题,本文提出一种频率失配的自适应相位差无偏估计方法.通过对信号展开式参数进行自适应迭代估计,利用信号展开式参数估计值实时计算两路正弦信号的相位差,可有效降低相位差估计方法的复杂度,提高算法实时性,且在频率失配和低信噪比条件下依然可以获得无偏的相位差估计结果.

2 自适应相位差估计方法

两路正弦信号为:

$$\begin{cases} x_1(n) = s_1(n) + v_1(n) = A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1) + v_1(n) \\ x_2(n) = s_2(n) + v_2(n) = A_2 \cos(\omega_2 n + \theta_2) + v_2(n) \end{cases} \quad (1)$$

其中, A_i 为信号幅值, θ_i 为信号相位, ω_i 为信号角频率, 假设已知, $\omega_i = 2\pi f_i / f_s$, f_i 为信号频率, f_s 为采样频率, $v_i(n)$ 为噪声, 服从 $v \sim \text{WGN}(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2$.

由式(1)可得,

$$\begin{aligned} x_i(n) &= A_i \cos(\omega_i n + \theta_i) + v_i(n) \\ &= a_i \cos \omega_i n - b_i \sin \omega_i n + v_i(n) \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $a_i = A_i \cos \theta_i$, $b_i = A_i \sin \theta_i$. 由 a_i 和 b_i 可得

$$\begin{cases} A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \\ \theta_i = \arctan \frac{b_i}{a_i} \end{cases} \quad (3)$$

则两路正弦信号的相位差可表示为:

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 = \arctan \frac{b_1}{a_1} - \arctan \frac{b_2}{a_2} = \arctan \left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right) \quad (4)$$

对于 a_i 和 b_i 的求取, 令

$$\begin{cases} s_i(n) = \hat{a}_i(n) \cos \omega_i n - \hat{b}_i(n) \sin \omega_i n \\ e_i(n) = x_i(n) - s_i(n) \end{cases} \quad (5)$$

其中, $s_i(n)$ 是 $x_i(n)$ 的估计值, $e_i(n)$ 为估计误差, 在迭代计算过程中, $e_i(n)$ 应当逐步趋近于 0, 则 a_i 和 b_i 的自适应迭代计算式为:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \hat{a}_i(n+1) = \hat{a}_i(n) - \mu \frac{\partial e_i(n)}{\partial \hat{a}_i(n)} \\ \hat{b}_i(n+1) = \hat{b}_i(n) - \mu \frac{\partial e_i(n)}{\partial \hat{b}_i(n)} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} \hat{a}_i(n+1) = \hat{a}_i(n) + \mu e_i(n) \cos \omega_i n \\ \hat{b}_i(n+1) = \hat{b}_i(n) - \mu e_i(n) \sin \omega_i n \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

其中, μ 为步长. 将式(6)代入式(4), 可得自适应相位差估计方法

$$\Delta\theta(n) = \arctan \left(\frac{\hat{a}_2(n) \hat{b}_1(n) - \hat{a}_1(n) \hat{b}_2(n)}{\hat{a}_1(n) \hat{a}_2(n) + \hat{b}_1(n) \hat{b}_2(n)} \right) \quad (7)$$

其估计方法的流程如图 1 所示.

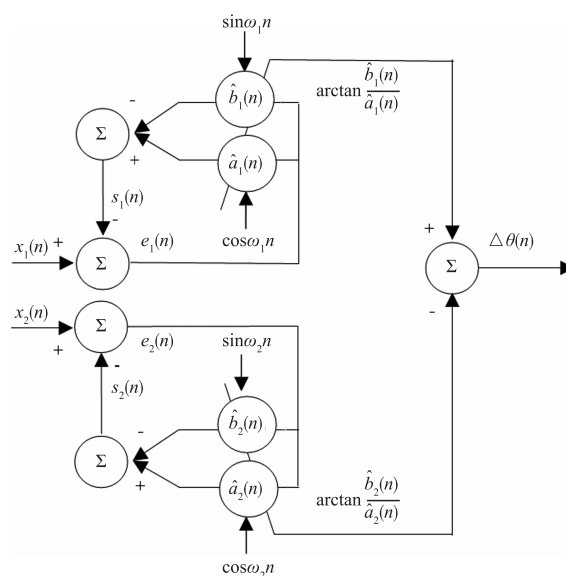


图1 自适应相位差估计方法结构图

3 性能分析

3.1 偏差分析

在实际应用中, 频率 ω_i 未知, 那么采用一定的频率估计方法获得的 $\hat{\omega}_i$ 与 ω_i 之间有频率失配 $\Delta\omega$, 故在利用式(5)和式(6)进行计算时, 将 $\hat{\omega}_i = \omega_i - \Delta\omega$ 代入式(5)和式(6)替换 ω_i , 可得:

$$\begin{cases} \hat{a}_i(n+1) = \hat{a}_i(n) + \mu e_i(n) \cos(\omega_i - \Delta\omega)n \\ \hat{b}_i(n+1) = \hat{b}_i(n) - \mu e_i(n) \sin(\omega_i - \Delta\omega)n \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$e_i(n) = a_i \cos \omega_i n - b_i \sin \omega_i n + v_i(n) - \hat{a}_i(n) \cos(\omega_i - \Delta\omega)n + \hat{b}_i(n) \sin(\omega_i - \Delta\omega)n \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),以计算 $\hat{a}_i(n)$ 为例,等式两边同取期望 $E[\bullet]$,可得

$$E[\hat{a}_i(n+1)] = \alpha E[\hat{a}_i(n)] + \frac{\mu}{2} f_{ai}(n) \quad (10)$$

其中,

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \frac{\mu}{2} \\ f_{ai}(n) = a_i \cos \Delta\omega n - b_i \sin \Delta\omega n \end{cases} \quad (11)$$

为获得 $E[\hat{a}_i(n)]$ 的表达式,式(10)两边取 Z 变换,

$$\begin{aligned} Z\{E[\hat{a}_i(n+1)]\} &= \alpha Z\{E[\hat{a}_i(n)]\} + \frac{\mu}{2} Z\{f_{ai}(n)\} \\ \Rightarrow zZ\{E[\hat{a}_i(n)]\} &= \alpha Z\{E[\hat{a}_i(n)]\} + \frac{\mu}{2} Z\{f_{ai}(n)\} \\ \Rightarrow Z\{E[\hat{a}_i(n)]\} &= \frac{\mu}{2} \frac{Z\{f_{ai}(n)\}}{z - \alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

式(12)中,

$$Z\{f_{ai}(n)\} = \frac{a_i(1 - z^{-1} \cos \Delta\omega) - b_i z^{-1} \sin \Delta\omega}{1 - 2z^{-1} \cos \Delta\omega + z^{-2}} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)于是可得

$$Z\{E[\hat{a}_i(n)]\} = \frac{\mu}{2} \frac{z}{z - \alpha} \frac{a_i(z - \cos \Delta\omega) - b_i \sin \Delta\omega}{z^2 - 2z \cos \Delta\omega + 1} \quad (14)$$

对式(14)取 z 的反变换,

$$\begin{aligned} E[\hat{a}_i(n)] &= -m_{ai} \alpha^n + m_{ai} \cos \Delta\omega n + n_{ai} \sin \Delta\omega n \\ &\approx m_{ai} \cos \Delta\omega n + n_{ai} \sin \Delta\omega n \end{aligned} \quad (15)$$

其中, α 和步长 μ 有关,说明式(6)的收敛性和 α 有关.且一般 $\mu < 1$,可以保证 α^n 的快速衰减,故将其省略,则式(15)中,

$$\begin{cases} m_{ai} = -\frac{\mu}{2} \frac{\gamma_{ai} + \alpha a_i}{\beta} \\ n_{ai} = \frac{\mu}{2} \frac{(\gamma_{ai} - \alpha a_i) \cos \Delta\omega + a_i - \alpha \gamma_{ai}}{\beta \sin \Delta\omega} \\ \gamma_{ai} = -a_i \cos \Delta\omega - b_i \sin \Delta\omega \\ \beta = \alpha^2 - 2\alpha \cos \Delta\omega + 1 \end{cases} \quad (16)$$

同理可得,

$$\begin{cases} E[\hat{b}_i(n+1)] = \alpha E[\hat{b}_i(n)] + \frac{\mu}{2} f_{bi}(n) \\ E[\hat{b}_i(n)] = m_{bi} \cos \Delta\omega n + n_{bi} \sin \Delta\omega n \end{cases} \quad (17)$$

其中,

$$\begin{cases} f_{bi}(n) = b_i \cos \Delta\omega n + a_i \sin \Delta\omega n \\ m_{bi} = -\frac{\mu}{2} \frac{\gamma_{bi} + \alpha b_i}{\beta} \\ n_{bi} = \frac{\mu}{2} \frac{(\gamma_{bi} - \alpha b_i) \cos \Delta\omega + b_i - \alpha \gamma_{bi}}{\beta \sin \Delta\omega} \\ \gamma_{bi} = -b_i \cos \Delta\omega + a_i \sin \Delta\omega \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } \mathbf{T} &= [T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4]^T = [\hat{a}_1(n) \ \hat{b}_1(n) \ \hat{a}_2(n) \ \hat{b}_2(n)]^T, \text{ 则} \\ E[\mathbf{T}] &= [E[\hat{a}_1(n)] \ E[\hat{b}_1(n)] \ E[\hat{a}_2(n)] \ E[\hat{b}_2(n)]]^T \end{aligned} \quad (19)$$

故式(7)变化为

$$\Delta\theta(n) = f(\mathbf{T}) \quad (20)$$

将 f 在点 $\mathbf{T}_0 = E[\mathbf{T}] = \boldsymbol{\mu}$ 附近用一阶泰勒级数展开^[17,18],

$$\Delta\theta(n) = f(\mathbf{T}) \approx f(\boldsymbol{\mu}) + \sum_{k=1}^4 \frac{\partial f}{\partial T_k} \Big|_{\mathbf{T}=\mathbf{T}_0} (T_k - \mu_k) \quad (21)$$

对式(21)求取期望,并假设 $\hat{a}_1(n)$, $\hat{b}_1(n)$, $\hat{a}_2(n)$ 和 $\hat{b}_2(n)$ 之间互不相关,则

$$\begin{aligned} E[\Delta\theta(n)] &= f(\boldsymbol{\mu}) \\ &= \arctan \left[\frac{E[\hat{a}_2(n)]E[\hat{b}_1(n)] - E[\hat{a}_1(n)]E[\hat{b}_2(n)]}{E[\hat{a}_1(n)]E[\hat{a}_2(n)] + E[\hat{b}_1(n)]E[\hat{b}_2(n)]} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

将式(15)和(17)代入式(22),可得

$$\begin{aligned} E[\Delta\theta(n)] &= \arctan \left[\frac{\varepsilon_1 \cos^2 \Delta\omega n + \varepsilon_2 \sin^2 \Delta\omega n + \varepsilon_3 \sin \Delta\omega n \cos \Delta\omega n}{\eta_1 \cos^2 \Delta\omega n + \eta_2 \sin^2 \Delta\omega n + \eta_3 \sin \Delta\omega n \cos \Delta\omega n} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)中,

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = m_{a1} m_{b2} - m_{a2} m_{b1} \\ \varepsilon_2 = n_{a1} n_{b2} - n_{a2} n_{b1} \\ \varepsilon_3 = m_{a1} n_{b2} + m_{b2} n_{a1} - m_{b1} n_{a2} - m_{a2} n_{b1} \\ \eta_1 = m_{a1} m_{a2} + m_{b1} m_{b2} \\ \eta_2 = n_{a1} n_{a2} + n_{b1} n_{b2} \\ \eta_3 = m_{a1} n_{a2} + m_{a2} n_{a1} + m_{b1} n_{b2} + m_{b2} n_{b1} \end{cases} \quad (24)$$

式(16)和式(18)代入式(24),展开化简后,得到

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\mu^2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}{4\beta} \\ \varepsilon_3 = \eta_3 = 0 \\ \eta_1 = \eta_2 = \frac{\mu^2 (a_1 a_2 + b_1 b_2)}{4\beta} \end{cases} \quad (25)$$

将式(25)代入式(23),可知

$$E[\Delta\theta(n)] = \arctan \left[\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right] \quad (26)$$

已知 $a_i = A_i \cos \theta_i$, $b_i = A_i \sin \theta_i$, 式(23)进一步化简为

$$E[\Delta\theta(n)] = \theta_1 - \theta_2 = \Delta\theta \quad (27)$$

由式(27)可知, 自适应相位差估计方法无偏, 在含噪声情况下, 不受频率失配 $\Delta\omega$ 的影响.

3.2 方差分析

$\Delta\theta(n)$ 的估计方差为

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta\theta] &= E\left\{\left[f(\boldsymbol{\mu}) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}\Big|_{\mathbf{T}=\boldsymbol{\mu}} (\mathbf{T}-\boldsymbol{\mu}) - E[\Delta\theta]\right]^2\right\} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}\Big|_{\mathbf{T}=\boldsymbol{\mu}}^T \mathbf{C} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}\Big|_{\mathbf{T}=\boldsymbol{\mu}} \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}\Big|_{\mathbf{T}=\boldsymbol{\mu}} = [\Delta_{a1} \ \Delta_{b1} \ \Delta_{a2} \ \Delta_{b2}]^T$, \mathbf{C} 是矩阵 \mathbf{T} 的协方差矩阵.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial T_1}\Big|_{T_i=\mu_i} = \Delta_{a1} = \frac{-E[\hat{b}_1(n)]}{E^2[\hat{a}_1(n)] + E^2[\hat{b}_1(n)]} \\ \frac{\partial f}{\partial T_2}\Big|_{T_i=\mu_i} = \Delta_{b1} = \frac{E[\hat{a}_1(n)]}{E^2[\hat{a}_1(n)] + E^2[\hat{b}_1(n)]} \\ \frac{\partial f}{\partial T_3}\Big|_{T_i=\mu_i} = \Delta_{a2} = \frac{E[\hat{b}_2(n)]}{E^2[\hat{a}_2(n)] + E^2[\hat{b}_2(n)]} \\ \frac{\partial f}{\partial T_4}\Big|_{T_i=\mu_i} = \Delta_{b2} = \frac{-E[\hat{a}_2(n)]}{E^2[\hat{a}_2(n)] + E^2[\hat{b}_2(n)]} \end{cases} \quad (29)$$

$$\mathbf{C} = \text{diag}(\text{var}[\hat{a}_1(n)], \text{var}[\hat{b}_1(n)], \text{var}[\hat{a}_2(n)], \text{var}[\hat{b}_2(n)]) \quad (30)$$

$$\begin{cases} \text{var}[\hat{a}_i(n)] = E[(\hat{a}_i(n) - E[\hat{a}_i(n)])^2] \\ \text{var}[\hat{b}_i(n)] = E[(\hat{b}_i(n) - E[\hat{b}_i(n)])^2] \end{cases} \quad (31)$$

为计算式(31), 令

$$\begin{cases} \delta_{ai}(n) = \hat{a}_i(n) - E[\hat{a}_i(n)] \\ \delta_{bi}(n) = \hat{b}_i(n) - E[\hat{b}_i(n)] \end{cases} \quad (32)$$

于是

$$\begin{cases} \text{var}[\hat{a}_i(n)] = E[\delta_{ai}^2(n)] \\ \text{var}[\hat{b}_i(n)] = E[\delta_{bi}^2(n)] \end{cases} \quad (33)$$

由式(15)、式(17)和式(32)可得

$$\delta_{ai}(n+1) = \delta_{ai}(n) + \mu e_i(n) \cos(\omega_i - \Delta\omega)n + g_{ai}(n) \quad (34)$$

其中,

$$\begin{cases} g_{ai}(n) = E[\hat{a}_i(n)] - E[\hat{a}_i(n+1)] \\ \quad = \varepsilon_{ai} \cos \Delta\omega n - \eta_{ai} \sin \Delta\omega n \\ \varepsilon_{ai} = m_{ai}(1 - \cos \Delta\omega) + n_{ai} \sin \Delta\omega \\ \eta_{ai} = n_{ai}(1 - \cos \Delta\omega) - m_{ai} \sin \Delta\omega \end{cases} \quad (35)$$

$$\delta_{bi}(n+1) = \delta_{bi}(n) - \mu e_i(n) \sin(\omega_i - \Delta\omega)n + g_{bi}(n) \quad (36)$$

其中,

$$\begin{cases} g_{bi}(n) = E[\hat{b}_i(n)] - E[\hat{b}_i(n+1)] \\ \quad = \varepsilon_{bi} \cos \Delta\omega n + \eta_{bi} \sin \Delta\omega n \\ \varepsilon_{bi} = m_{bi}(1 - \cos \Delta\omega) - n_{bi} \sin \Delta\omega \\ \eta_{bi} = n_{bi}(1 - \cos \Delta\omega) + m_{bi} \sin \Delta\omega \end{cases} \quad (37)$$

式(34)和(36)两边取期望, 得到

$$E[\delta_{ai}(n+1)] = \alpha E[\delta_{ai}(n)] + g_{ai}(n) \quad (38)$$

$$E[\delta_{bi}(n+1)] = \alpha E[\delta_{bi}(n)] + g_{bi}(n) \quad (39)$$

对式(38)两边取 Z 变换,

$$Z\{E[\delta_{ai}(n+1)]\} = Z\{\alpha E[\delta_{ai}(n)]\} + Z\{g_{ai}(n)\} \quad (40)$$

所以

$$Z\{E[\delta_{ai}(n)]\} = \frac{Z\{g_{ai}(n)\}}{z - \alpha} = \frac{z}{z - \alpha} \frac{\varepsilon_{ai} z + \lambda_{ai}}{z^2 - 2z \cos \Delta\omega + 1} \quad (41)$$

其中, $\lambda_{ai} = -\varepsilon_{ai} \cos \Delta\omega - \eta_{ai} \sin \Delta\omega$

由式(41)可知 $E[\delta_{ai}(n)]$ 的表达式为

$$\begin{aligned} E[\delta_{ai}(n)] &= -p_{ai} \alpha^n + p_{ai} \cos \Delta\omega n + q_{ai} \sin \Delta\omega n \\ &\approx p_{ai} \cos \Delta\omega n + q_{ai} \sin \Delta\omega n \end{aligned} \quad (42)$$

其中, α^n 衰减较快, 可将其省略, 式(42)中

$$\begin{cases} p_{ai} = -\frac{\lambda_{ai} + \alpha \varepsilon_{ai}}{\beta} \\ q_{ai} = \frac{(\lambda_{ai} - \alpha \varepsilon_{ai}) \cos \Delta\omega + \varepsilon_{ai} - \alpha \lambda_{ai}}{\beta \sin \Delta\omega} \end{cases} \quad (43)$$

同理, 可知 $E[\delta_{bi}(n)]$ 的表达式为

$$E[\delta_{bi}(n)] = p_{bi} \cos \Delta\omega n + q_{bi} \sin \Delta\omega n \quad (44)$$

$$\begin{cases} p_{bi} = -\frac{\lambda_{bi} + \alpha \varepsilon_{bi}}{\beta} \\ q_{bi} = \frac{(\lambda_{bi} - \alpha \varepsilon_{bi}) \cos \Delta\omega + \varepsilon_{bi} - \alpha \lambda_{bi}}{\beta \sin \Delta\omega} \\ \lambda_{bi} = -\varepsilon_{bi} \cos \Delta\omega + \eta_{bi} \sin \Delta\omega \end{cases} \quad (45)$$

式(34)和式(36)两边平方, 然后取期望, 可得

$$\begin{aligned} E[\delta_{ai}^2(n+1)] &= \left(1 - \mu + \frac{3}{8}\mu^2\right) E[\delta_{ai}^2(n)] + \frac{1}{8}\mu^2 E[\delta_{bi}^2(n)] \\ &\quad + (2 - \mu) g_{ai}(n) E[\delta_{ai}(n)] + \frac{1}{2}\mu^2 \sigma^2 + g_{ai}^2(n) \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} E[\delta_{bi}^2(n+1)] &= \left(1 - \mu + \frac{3}{8}\mu^2\right) E[\delta_{bi}^2(n)] + \frac{1}{8}\mu^2 E[\delta_{ai}^2(n)] \\ &\quad + (2 - \mu) g_{bi}(n) E[\delta_{bi}(n)] + \frac{1}{2}\mu^2 \sigma^2 + g_{bi}^2(n) \end{aligned} \quad (47)$$

由式(46)和式(47)可知, 相位差估计方法的方差是受频率失配 $\Delta\omega$ 所影响的, 为了消除 $\Delta\omega$ 的影响, 对式(46)和式(47)两边, 针对 $\Delta\omega$ 取时间平均 $E_T[\bullet]$,

消除 $\Delta\omega n$ 的影响,为简化分析,稳态条件下可假设

$$\begin{aligned} E_T[\delta_{ai}^2(n+1)]|_{n \rightarrow \infty} &= E_T[\delta_{ai}^2(n)]|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\delta_{ai}^2(\infty)] \\ E_T[\delta_{bi}^2(n+1)]|_{n \rightarrow \infty} &= E_T[\delta_{bi}^2(n)]|_{n \rightarrow \infty} = E_T[\delta_{bi}^2(\infty)] \end{aligned} \quad (48)$$

由于采用的估计方法类似,所以参数 δ_{ai} 和 δ_{bi} 具备相同的稳态方差,将式(42)和式(44)分别代入式(46)和式(47),取时间平均 $E_T[\cdot]$ 可得

$$\begin{aligned} W_i &= E_T[\delta_{ai}^2(\infty)] = E_T[\delta_{bi}^2(\infty)] \\ &= \frac{\mu\sigma^2}{2-\mu} + \frac{2}{\mu} F_i(\mu, \Delta\omega) + \frac{\mu A_i^2(1-\cos\Delta\omega)}{2(2-\mu)\beta} \end{aligned} \quad (49)$$

其中,

$$\begin{aligned} F_i(\mu, \Delta\omega) &= E_T[g_{ai}(n)E[\delta_{ai}(n)]]|_{n \rightarrow \infty} \\ &= E_T[g_{bi}(n)E[\delta_{bi}(n)]]|_{n \rightarrow \infty} \\ &= \frac{\mu^2 A_i^2}{2\beta^2} (1-\cos\Delta\omega)^2 (\cos\Delta\omega - \alpha) \end{aligned} \quad (50)$$

将式(49)代入式(28),可得

$$\text{var}[\Delta\theta] = \sum_{i=1}^2 (\Delta_{ai}^2 + \Delta_{bi}^2) W_i \quad (51)$$

由式(29)可知

$$\Delta_{ai}^2 + \Delta_{bi}^2 = \frac{4\beta}{\mu^2 A_i^2} \quad (52)$$

将式(52)代入式(51)可得

$$\begin{aligned} \text{var}[\Delta\theta] &= \frac{4\beta}{\mu^2} \sum_{i=1}^2 \frac{W_i}{A_i^2} \\ &= \frac{4\beta}{\mu(2-\mu)} \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma^2}{A_i^2} \\ &\quad + \frac{8}{\mu\beta} (1-\cos\Delta\omega)^2 (\cos\Delta\omega - \alpha) \\ &\quad + \frac{4}{\mu(2-\mu)} (1-\cos\Delta\omega) \end{aligned} \quad (53)$$

一般而言,频率失配 $\Delta\omega$ 较小,且步长 $\mu < 1$,故可知

$$\begin{cases} \cos\Delta\omega \approx 1 - \frac{1}{2}\Delta\omega^2 \\ \cos\Delta\omega - \alpha \approx \frac{1}{2}(\mu - \Delta\omega^2) \\ \beta \approx \frac{1}{4}\mu^2 + \Delta\omega^2 \end{cases} \quad (54)$$

当 $A_1 = A_2 = A$, 将式(54)代入式(53)可得

$$\text{var}[\Delta\theta] \approx \frac{\sigma^2(\mu^2 + 4\Delta\omega^2) + \Delta\omega^2}{\mu} \quad (55)$$

为最小化式(55),令式(55)偏导为零,可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{var}[\Delta\theta]}{\partial \mu} &= \frac{\sigma^2(\mu^2 - 4\Delta\omega^2) - \Delta\omega^2}{\mu^2} = 0 \\ \Rightarrow \mu_{\text{opt}} &= \Delta\omega \sqrt{4 + \frac{A^2}{\sigma^2}} \end{aligned} \quad (56)$$

由式(56)可知,自适应相位差估计方法的最优步长同频率失配 $\Delta\omega$ 以及信号幅值,噪声有关. 故可根据不同的值确定最优的迭代步长 μ .

4 计算验证

设两路正弦信号频率相等,且信号频率 $\omega = 0.2\pi$, 幅值 $A = 1$, 频率失配 $\Delta\omega = 0.001\pi$, 相位差 $\Delta\theta = 0.2\pi$, SNR (Signal Noise Ratio, 信噪比) 为 5dB 和 20dB, 分别对本文方法、Hilbert 方法^[16]、数据延拓方法^[11]、四阶窗方法^[7] 和相频匹配方法^[12] 进行相位差估计分析对比. 由于本文方法和 Hilbert 方法为自适应计算,故设置步长 $\mu = 0.01$, 初值统一设置为 0, 后三种方法为基于相关原理的方法,其计算递推点数统一设置为 $N = 200$. 独立运行 100 次后,不同信噪比条件下各种相位差估计方法如图 2 和 3 所示.

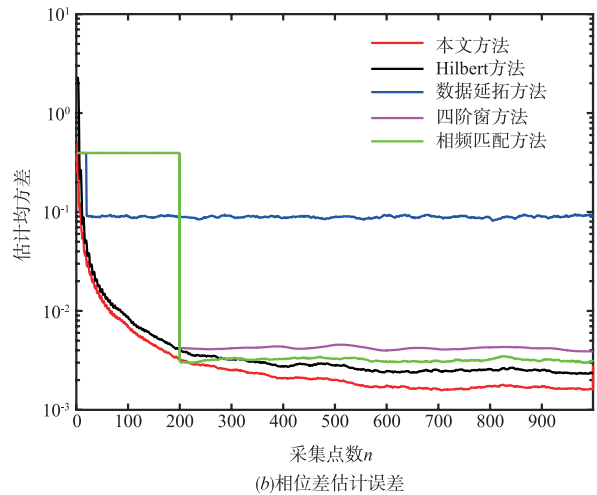
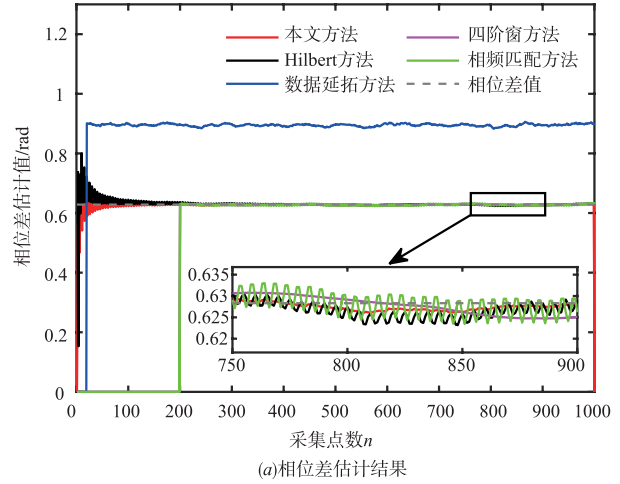


图2 信噪比5dB条件下不同相位差估计方法对比图

由图2、图3可知,本文方法同 Hilbert 方法较为接近,但具备更好的抗噪性,其相位差估计 MSE (Mean Square Error, 均方误差) 要低于 Hilbert 方法. 数据延拓方法对于噪声过于敏感,且一般是有偏估计. 四阶窗方

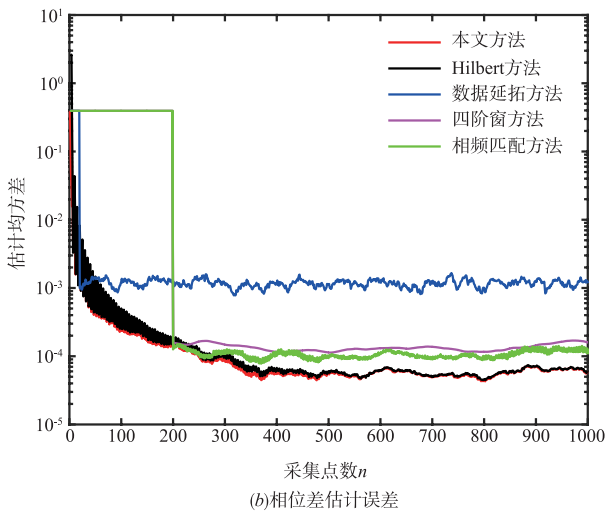
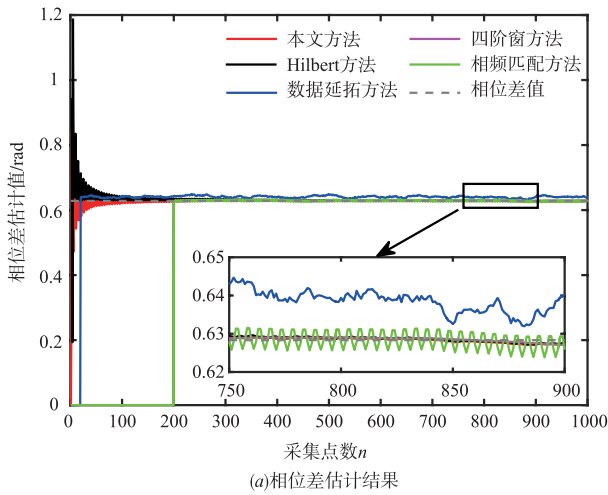


图3 信噪比20dB条件下不同相位差估计方法对比图

法抗噪性适中,但其 MSE 值较大,相频匹配方法同四阶窗方法较为类似,虽然其 MSE 较小,但其相位差估计结果有一定的振荡。

为了比较各种相位差估计方法对于时变相位差的跟踪能力,验证其适用性,特选择文献[19]所提的时变相位差模型进行分析.保持参数设置与图2一致,信噪比 5dB,其时变相位差的估计结果如图4所示。

由图4可知,本文方法和 Hilbert 方法估计结果类似,能够跟踪相位差的变化情况.四阶窗方法和相频匹配方法较类似,基本趋势较为一致.反观数据延拓方法,在 5dB 的信噪比条件下其相位差估计结果有偏,受噪声影响较大。

由于四阶窗方法、数据延拓方法和相频匹配方法不是自适应估计方法,其计算量较大,且与本文方法和 Hilbert 方法有着本质的不同,为了深入探讨信号参数对于不同相位差估计方法 MSE 的影响,故主要选择较为类似的本文方法和 Hilbert 方法进行 MSE 分析.由于本文方法和 Hilbert 方法同为自适应估计方法,其时域

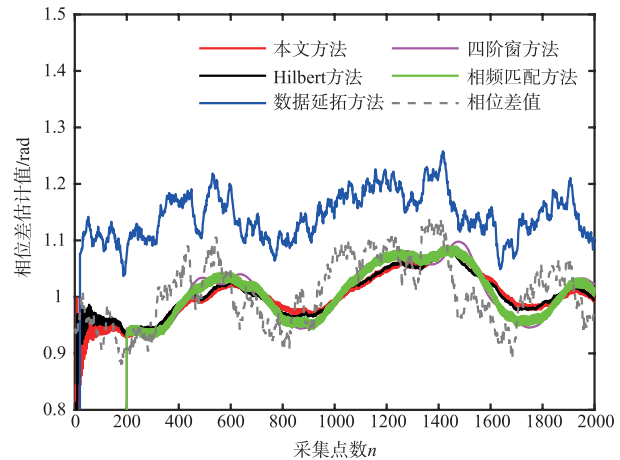


图4 时变相位差条件下不同相位差估计方法对比图

递推的计算量基本相当,但 Hilbert 方法需要进行 Hilbert 变换,该变换需要计算 N 点数据的 DFT,故总体而言,在相同条件下本文方法的计算量是要小于 Hilbert 方法的。

不同频率失配 $\Delta\omega$ 、不同步长 μ 和不同 SNR 条件下,本文方法和 Hilbert 方法独立运行 500 次,其 MSE 值如图5~7所示。

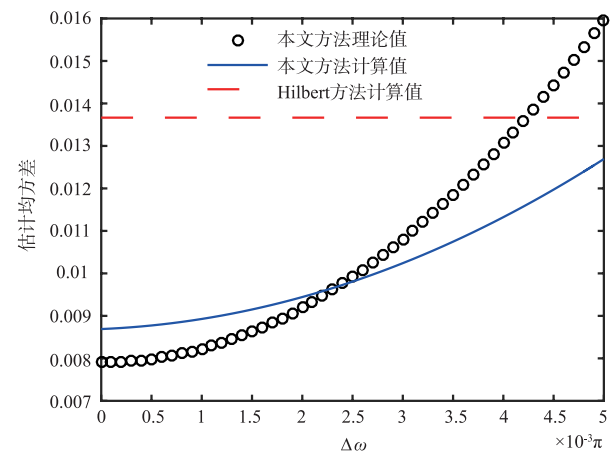


图5 SNR=5dB, $\mu=0.05$, $A=1$, $\omega=0.2\pi$, $\Delta\theta=0.2\pi$ 条件下不同 $\Delta\omega$ 值的相位差估计MSE

由图5~7所示可知:

(1) 本文方法在频率失配 $\Delta\omega$ 的影响下依然可以取得较小的 MSE 值.虽然 Hilbert 方法不需要信号频率信息,不受 $\Delta\omega$ 的影响,但其 MSE 值较大,稳态性能欠佳.此外,本文方法不同频率失配 $\Delta\omega$ 条件下的计算值同理论值吻合程度不好,但基本趋势可以保持一致.分析其原因,可能在进行时间平均计算时出现的偏差,对频率失配 $\Delta\omega$ 分析有偏差;

(2) 在小步长条件下,Hilbert 方法的 MSE 较小,但会导致较慢的收敛速度.在步长逐渐增大的过程中,本文方法可以取得较小的 MSE 值,性能较好,且在步长取

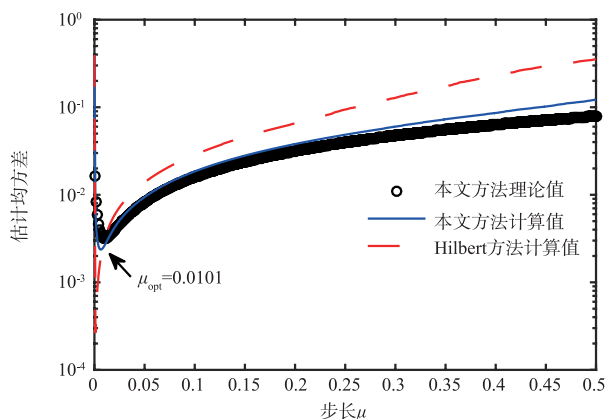


图6 SNR=5dB, $\Delta\omega=0.001\pi$, $A=1$, $\omega=0.2\pi$, $\Delta\theta=0.2\pi$ 条件下不同 μ 值的相位差估计MSE

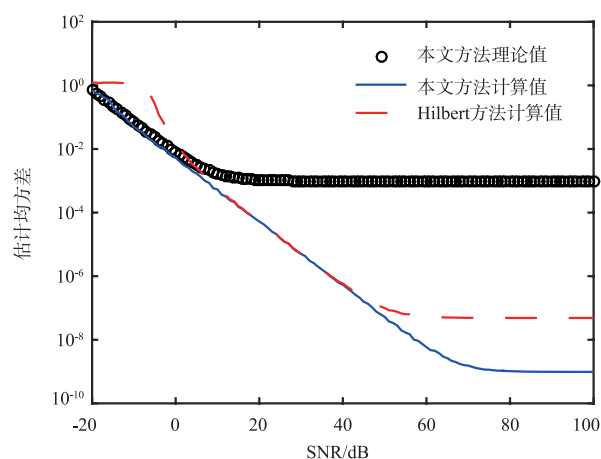


图7 $\mu=0.01$, $\Delta\omega=0.001\pi$, $A=1$, $\omega=0.2\pi$, $\Delta\theta=0.2\pi$ 条件下不同SNR值的相位差估计MSE

最优值时,可以取得最小的MSE值,这点同理论分析保持一致.由图6可知,本文方法理论值同计算值吻合度较高,可以给出较准确的预测值,针对步长 μ 的理论计算是正确的.

(3)由图7可知,低信噪比条件下,本文方法的MSE值更低,性能更好.值得注意的是在信噪比高的情况下,本文方法的MSE值也更小,主要是因为本方法是无偏估计的缘故.在信噪比中段,两种方法基本保持一致.此外,本文方法的计算值和理论值在信噪比小于10dB时吻合的较好,但当大于20dB的时候,出现了偏差,说明对噪声的处理有偏差,有待进一步分析.

5 结论

相位差估计方法存在计算复杂、受频率失配影响较大和抗噪性不强的问题,为此提出了一种频率失配的自适应相位差无偏估计方法.通过信号参数的自适应估计,实时计算两路正弦信号的相位差,有效降低了相位差估计方法的复杂度,提升了频率失配条件下的

估计精度,并增强了抗噪性,研究表明有如下结论:

(1)相位差估计精度高.即使在频率失配 $\Delta\omega$ 的影响,所提方法依然可以获得无偏的相位差估计结果.

(2)抗噪性能好.在较低和较高信噪比条件下,优于其他算法的估计性能,对噪声敏感度低.

(3)结构简单,实时性好,便于实现.本文方法为时域递推方法,实时性可以得到较好的保障,应用前景广泛.

下一步将深入研究性能分析中理论值和计算值有偏差的原因,提高性能分析的精准度.

参考文献

- [1] 宋佳凝,徐国栋,李鹏飞.基于相位差测量的脉冲星时间相对导航方法[J].宇航学报,2016,37(11):1304-1311. SONG JN, XU GD, LI PF. Pulsar based time relative navigation method using phase difference measurement[J]. Journal of Astronautics, 2016, 37(11):1304-1311. (in Chinese)
- [2] VUČIJK, NADA M, SARANOVAC L. A simple algorithm for the estimation of phase difference between two sinusoidal voltages[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2010, 59(12):3152-3158.
- [3] 马晓红,李瑞,殷福亮.基于信号相位差和后置滤波的语音增强方法[J].电子学报,2009,37(9):1977-1981. MA XH, LI R, YIN FL. A speech enhancement method based on phrase-error and post-filtering[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(9):1977-1981. (in Chinese)
- [4] HOU QL, XU KJ, FANG M, et al. Development of Coriolis mass flowmeter with digital drive and signal processing technology[J]. Isa Transactions, 2013, 52(5):692-700.
- [5] ASSOUS S, LINNETT L. High resolution time delay estimation using sliding discrete Fourier transform[J]. Digital Signal Processing, 2012, 22(5):820-827.
- [6] TU YQ, ZHANG HT. Method for cmf signal processing based on the recursive DTFT algorithm with negative frequency contribution[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 2008, 57(11):2647-2654.
- [7] 沈廷鳌,涂亚庆,李明,等.基于一类新窗的滑动DTFT相位差测量算法及分析[J].中南大学学报(自然科学版), 2015, 46(4):1302-1309. SHEN TA, TU YQ, LI M, et al. New sliding DTFT algorithm for phase difference measurement based on a new kind of windows and its analysis[J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2015, 46(4):1302-1309. (in Chinese)
- [8] SHEN TA, TU YQ, LI M, et al. A new phase difference measurement algorithm for extreme frequency signals based on discrete time Fourier transform with negative frequency

- contribution. [J]. Review of Scientific Instruments, 2015, 86(1):0151041-0151049.
- [9] SHASWARY E, TAVAKKOLI J, XU Y. A new algorithm for time-delay estimation in ultrasonic echo signals[J]. Ultrasonics Ferroelectrics & Frequency Control IEEE Transactions on, 2015, 62(1):236-241.
- [10] 沈廷鳌, 涂亚庆, 刘翔宇, 等. 基于相关原理的非整周期信号相位差测量算法[J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(9):2153-2160.
SHEN TA, TU YQ, LIU XY, et al. Research on phase difference measurement for non-integer period sampling signal based on correlation theory[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2014, 35(9):2153-2160. (in Chinese)
- [11] 沈廷鳌, 涂亚庆, 李明, 等. 数据延拓式相关的相位差测量方法及验证[J]. 仪器仪表学报, 2014, 35(6):1331-1337.
SHEN TA, TU YQ, LI M, et al. Research and validation on improved correlation method for phase difference measurement based on data extension[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2014, 35(6):1331-1337. (in Chinese)
- [12] TU YQ, SHEN YL, ZHANG HT, et al. Phase and frequency matching-based signal processing method for Coriolis mass flowmeters[J]. Measurement Science Review, 2016, 16(2):62-67.
- [13] SVETE A, KUTIN J, BOBOVNIK G, et al. Theoretical and experimental investigations of flow pulsation effects in Coriolis mass flowmeters[J]. Journal of Sound & Vibration, 2015, 352(9):30-45.
- [14] 刘维来, 赵璐, 王克逸, 等. 基于希尔伯特变换的科氏流量计信号处理[J]. 计量学报, 2013, 34(5):446-451.
LIU WL, ZHAO L, WANG KY, et al. Signal processing for Coriolis mass flowmeter based on Hilbert transform [J]. Acta Metrologica Sinica, 2013, 34(5):446-451. (in Chinese)
- [15] TU YQ, YANG HY, ZHANG HT, et al. CMF signal processing method based on feedback corrected ANF and Hilbert transformation [J]. Measurement Science Review, 2014, 14(1):41-47.
- [16] 杨辉跃, 涂亚庆, 张海涛, 等. 一种基于 LMS 的振动信号相位差自适应无偏估计方法及应用[J]. 振动与冲击, 2016, 35(10):55-59.
YANG HY, TU YQ, ZHANG HT, et al. LMS based phase difference adaptive unbiased estimation method and its application [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(10):55-59. (in Chinese)
- [17] Kay S. Fundamentals of Statistical Processing (Volume 1: Estimation Theory) [M]. New Jersey: A Simon & Schuster Company, 1993. 294-295.
- [18] 涂亚庆, 李明, 沈廷鳌, 等. 计及负频率的 DFT 与 DTFT 相位差测量误差分析[J]. 振动与冲击, 2015, 34(20):85-91.
TU YQ, LI M, SHEN TA, et al. Error analysis of DFT and DTFT based phase difference measurement with negative frequency contribution [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(20):85-91. (in Chinese)
- [19] 李叶, 徐科军, 朱志海, 等. 面向时变的科里奥利质量流量计信号的处理方法研究与实现[J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(1):8-14.
LI Y, XU KJ, ZHU ZH, et al. Study and implementation of processing method for time-varying signal of coriolis mass flowmeter [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(1):8-14. (in Chinese)

作者简介



李明 男, 1985 年 1 月出生于山西太原, 现为后勤工程学院讲师, 主要研究方向为信号处理, 智能检测与仪表。
E-mail: limitonly@126.com